Institut National Polytechnique de Lorraine

Session 1991

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE
APPLIQUEE ET DE PROSPECTION MINIERE

Epreuve de Mathématiques

Les candidats sont invités à soigner l'écriture, la présentation et la rédaction. Aucun résultat non clairement justifié ne sera pris en compte. Les candidats sont priés d'énoncer complètement les théorèmes qu'ils utilisent. A condition de signaler explicitement qu'on n'a pu le démontrer, on peut utiliser un résultat du texte, pour traiter la suite.

La partie I est indépendante des parties II et III.

Partie I

On considère les séries entières de la variable réelle x:

$$f_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{et, si } n \geq 1,\ f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k .$$

1) Quel est le rayon de convergence R de la série $f_n(x)$?

Préciser pour quelles valeurs de x la série converge.

2) Trouver, pour $n \geq 1$, une relation simple entre f_n et la dérivée de f_{n-1}.

3) Calculer pour $|x| < R$, $f_0(x)$, $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

4) Calculer $f_3(1/2)$.

5) Montrer qu'il existe pour tout entier $n \geq 0$, un polynôme Q_n de degré n, à coefficients entiers positifs, tel que, si $|x| < R$,

$$f_n(x) = \frac{Q_n(x)}{(1-x)^{n+1}} .$$

En déduire que $f_n(1/2)$ est pour tout $n \geq 0$ un nombre entier positif pair.

Partie II

Soit f une fonction à valeurs réelles de classe C^1 sur R. On pose si x est non nul

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\left(x\, f(x) + (x-1)\int_0^x f(t)dt\right).$$

1) Montrer que lorsque x tend vers 0, g(x) possède une limite de la forme $a\, f(0) + b\, f'(0)$,
et donner les constantes a et b.

2) On définit une fonction F en posant

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\left(x\, f(x) + (x-1)\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right) & \text{si } x \neq 0 \\ a\, f(0) + b\, f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

où a et b sont les constantes déterminées dans la question précédente.
Montrer que la fonction F est continue sur R.

3) a) Calculer F si f est définie par

$$f(x) = (x-1)(2x+3)e^x .$$

b) Etudier et représenter graphiquement la fonction F.

4) Calculer F si f est définie par

$$f(x) = x^n$$

où n appartient à N. (Remarque: si n=0 $f(x) = 1$).

Partie III

On note $e_n(x) = x^{n-1}$ si $n \geq 2$ et $e_1(x) = 1$.

On rappelle que si $N \geq 1$, les polynômes $(e_1,\ldots,e_N)$ constituent une base de l'espace vectoriel H constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à N-1. On supposera $N \geq 3$ dans la suite du problème.

Si f est un polynôme, on note désormais $\Phi(f)$ la fonction F obtenue dans la partie II.

1) Montrer que Φ est alors une application linéaire de H dans lui-même, et écrire la matrice A de Φ dans la base $(e_1,..,e_N)$.

A SUIVRE

2) Trouver les valeurs propres de A, et montrer que cette matrice est diagonalisable. On notera $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ les valeurs propres, avec

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_N .$$

Quelle est la dimension du sous-espace propre E_k associé à la valeur propre λ_k ?

3) Soit f un polynôme non identiquement nul vérifiant

$$\phi(f) = \lambda_k f .$$

et G la primitive de f s'annulant en zéro.

a) Montrer que la fonction G vérifie une équation différentielle de la forme

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-k}$$

où α et β sont des constantes que l'on déterminera.

b) Résoudre cette équation.

c) En déduire le sous-espace propre E_k.

4) On pose $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = x-1$

et si $3 \leq k \leq N$

$$P_k(x) = (x-1)(x-k)^{k-2}.$$

Dire pourquoi $(P_1,\ldots,P_N)$ est une base de H, et écrire la matrice B de ϕ dans cette base.

5) Montrer que

$$P_k(x) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j}\, k^{k-j-2}\, j^2\, C_k^j\, x^{j-1} .$$

6) On prend N = 4.
a)
Exprimer les polynômes (P_1,P_2,P_3,P_4) dans la base (e_1,e_2,e_3,e_4), exprimer les polynômes (e_1,e_2,e_3,e_4) dans la base (P_1,P_2,P_3,P_4), et écrire les matrices de changement de base S et S^{-1}, telles que

$$B = S^{-1}.A.S.$$

b) Calculer B^n pour tout entier $n \geq 0$.
Montrer que

$$A^n = S.B^n.S^{-1}$$

et en déduire l'expression de A^n.

Partie IV

Une urne contient 4 boules: une rouge et 3 blanches.
On joue de la manière suivante: on tire au hasard une boule.
- si la boule tirée est rouge on la replace dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, on l'enlève de l'urne.

Soit X_k la variable aléatoire donnant le nombre de boules restant dans l'urne après le k-ième tirage.
Par convention X_o est la variable certaine: $X_o = 4$.

On pose

$$U_k = \begin{bmatrix} P(X_k=1) \\ P(X_k=2) \\ P(X_k=3) \\ P(X_k=4) \end{bmatrix}$$

où la lettre P désigne la Probabilité.

1) Montre que pour $k \geq 1$, l'on peut écrire $U_k = A.U_{k-1}$

où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

En déduire l'expression de U_k en fonction de U_o, de A et de k.

Puis déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire X_k.

2) Calculer la limite de $P(X_k = 1)$, lorsque k tend vers l'infini.

3) Déterminer la probabilité y_k pour que l'urne ne contienne plus que la boule rouge pour la première fois après le k-ième tirage.

4) Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$P(Y=k) = y_k .$$

Déterminer l'espérance et la variance de Y.
(On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles).

.....

FIN